

27/05 Схема приложения ПМП

1) Составляем ф-цию $H(x, u, t, \psi) = -f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle$, считая, что перемен-е x, u, ψ пока что никак не зависят от t и явл-ся пар-ми $x \in E^n, u \in V, \psi \in E^n$; осознаем, что это за ф-ция $g^0(x)$ с арг. x (а не $x(T)$ — это мы пока не знаем).

2) Решаем конечномерн. зад.: $H(x, u, t, \psi) \rightarrow \sup, u \in V$ по перемен-й u и находим ф-цию $u = u(x, t, \psi)$ со знач-ми из V :

$$\sup_{u \in V} H(x, u, t, \psi) = H(x, u(x, t, \psi), t, \psi) \quad (1.2)$$

В отличие от исходной зад., λ заключа-ся в выборе управления $u = u(t)$ из ∞ пр-ва, зад. поиска $u = u(x, t, \psi)$ в конечномер. пр-ве E^r при $u \in V$ с пар-рами $t \in [t_0, T], x \in E^n, \psi \in E^n$ выглядит более легкой (хотя, конечно, тут немало трудностей). К счастью, в многих приклад. зад-х ф-цию

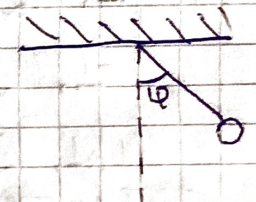
$u(x, t, \psi)$ удается выписать явно, аналитически. Заметим, что (12) не всегда имеет! реш-е, так что ф-ция $u(x, t, \psi)$, вводя в (13), иногда составляем кр. зад.: $\dot{x} = f(x, u(x, t, \psi), t), \psi = -\frac{\partial H}{\partial x} |_{u=u(x, t, \psi)}, t_0 \leq t \leq T, \quad (13)$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $x(t), \psi(t)$ $x(t_0) = x_0, \psi(T) = -\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} |_{x=x(T)} \quad (14)$

- это уже более-менее знакомый объект, называемый Крае-
 вой задачей принципа макс. Зад. (13)-(14) иногда удается решить
 аналитически, а так решаем численно

4) Если реше $(x(t), \psi(t))$ зад. (13)-(14), можем составить ф-цию
 $u(t) = u(x(t), \psi(t)), t_0 \leq t \leq T$, г/д все утв-я $\mathbb{E}$ выполнены -
 эта ф-ция вполне лб.

Пример 1 (Зад. упр-ния маятника)

$\ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} + \sin \varphi = u, u(t) \in L_2(0, T), |u(t)| \leq 1$
 $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \varphi_1$



$J(u) = \varphi^2(T) + \dot{\varphi}^2(T) \rightarrow \inf_u$ // Физ. смысл: приходим в положение равновесия с нулев. координатой и нулев. скоростью

1) grad

$\begin{cases} \varphi = x_1 \\ \dot{\varphi} = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = u - \beta x_2 - \sin x_1 = f_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = \varphi_0 = x_{10} \\ x_2(0) = \varphi_1 = x_{20} \end{cases}$

$\dot{x} = f$
 $x(0) = x_0$
 $J(u) = \overbrace{x_1^2(T) + x_2^2(T)}^{g^0(x(T))} \rightarrow \inf$

$H(x, u, t, \psi) = 0 + \langle \psi, f \rangle = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = \psi_1 x_2 + \psi_2 (u - \beta x_2 - \sin x_1)$

(1) $J'(u) = -\frac{\partial H}{\partial u} |_{u(t)} = -\psi_2 |_{u(t)}, \forall t$

(2) $\psi = -\frac{\partial H}{\partial x} |_{u(t)} = \begin{pmatrix} +\psi_2 \cos x_1 \\ -\psi_1 + \beta \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}'$

$\psi(T) = -\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} |_{x(T)} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} |_{x(T)} = \begin{pmatrix} -2x_1(T) \\ -2x_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(T) \\ \psi_2(T) \end{pmatrix}$

3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - \beta x_2 - \sin x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = \varphi_0 \\ x_2(0) = \varphi_1 \end{cases}$

Пример: $J'(u_0(t))$? $u_0(t) \rightarrow (z) \rightarrow x_1(t), x_2(t) \rightarrow (z) \rightarrow \psi_1(t), \psi_2(t) \rightarrow$
 $\rightarrow (1) J'(u_0(t))$ высшего

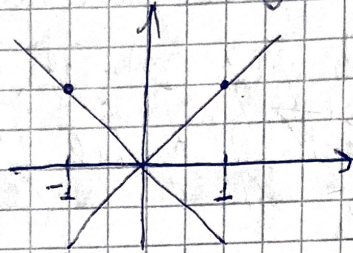
2) Решим зад. с помощью ПМТ

$$J(u) = x_1^2(T) + x_2^2(T) \rightarrow \inf, u \in \mathcal{U}: u(x) \in L_2(0, T): |u(t)| \leq 1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = u_0, \\ \dot{x}_2 = u - \beta x_2 - \sin x_1, & x_2(0) = u_1 \end{cases}$$

$$a) H(x, u, t, \psi) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (u - \beta x_2 - \sin x_1) \rightarrow \sup_{u \in \mathcal{U}, |u| \leq 1} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \psi_2 \cdot u \rightarrow \sup_{|u| \leq 1}$$



$$\Rightarrow u = \begin{cases} 1, & \psi_2 > 0, \\ -1, & \psi_2 < 0, \\ 0, & \psi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\delta) \text{ КЗ ПМ: } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = u_0, \\ \dot{x}_2 = \text{sign } \psi_2 - \beta x_2 - \sin x_1, & x_2(0) = u_1 \end{cases} \Rightarrow x(t), \psi(t) \downarrow u(t)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \cos x_1, & \psi_1(T) = -2x_1(T), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \beta \psi_2, & \psi_2(T) = -2x_2(T) \end{cases}$$

// Кусечев, Авангунов, Орлов - Лек. ЗОВ //

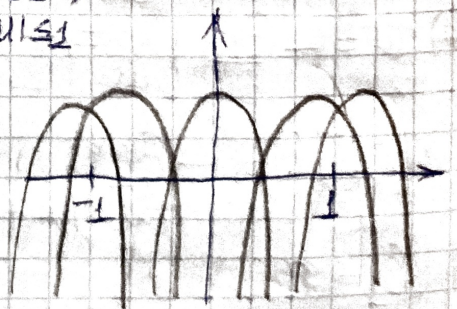
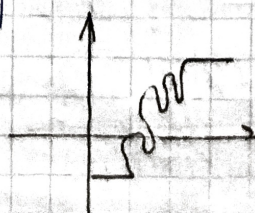
$$\text{Пример 5.2} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = u_0, \\ \dot{x}_2 = u - \beta x_2 - \sin x_1, & x_2(0) = u_1 \end{cases}$$

$$J(u) = \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \inf_{|u| \leq 1}$$

$$a) H(x, u, t, \psi) = -\frac{1}{2}u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (u - \beta x_2 - \sin x_1) \rightarrow \sup_{u \in \mathcal{U}, |u| \leq 1} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}u^2 + \psi_2 u \rightarrow \sup_{|u| \leq 1}$$

$$\Rightarrow u(x, \psi, t) = \begin{cases} \frac{\psi_2}{2}, & \psi_2 \in [-2, 2] \\ 1, & \psi_2 > 2 \\ -1, & \psi_2 < -2 \end{cases}$$



2) КВТМ: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u(x, \psi, t) - \beta x_2 - \sin x_1 \end{cases}$
 $\psi = -\frac{\partial H}{\partial x} = \dots, \quad \psi(T) = -\frac{\partial g_0}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = u(x, \psi, t) - \beta x_2 - \sin x_1, \quad x_2(0) = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_2 + \beta x_2, \quad \psi_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \beta x_1, \quad \psi_2(T) = 0 \end{cases}$

общий случай принципа максимума после VIII главы

VIII. Методы решения задач оптимизации. Метод стабильности

1) Постановка задачи

Дан функц-я $J(u) \rightarrow \inf, u \in U$ (1)

Ищем $J_* = \inf_u J(u)$ и т. $u_* \in U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\}$

Почти такая зад. реш-ся в редких случаях, поэтому мы будем довольны, если удастся найти т. $u_\epsilon \in U: J(u_\epsilon) - J_* \leq \epsilon, u_\epsilon \in D_\epsilon(u_*)$

На практике это сводится к построению (с помощью некот. метода) минимизирующей пос-ти $\{u_k\}: u_k \in U, J(u_k) \rightarrow J_*$.

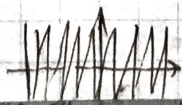
Тогда можем брать $u_\epsilon = u_k$ при дост. большом k , надеясь, что $u_k \in D_\epsilon(u_*)$. Но насколько оправданы такие действия?

Пример 1 $J(u) = \int_0^T x^2(t) dt \rightarrow \inf, \dot{x}(t) = u(t), x(0) = 0, u(t) \in U = \{u(t) \in L_2(0, T), |u(t)| \leq 1\}$
 $u_* = 0, J_* = 0$

$[u_k(t) = \sin(\frac{2\pi k}{T}t)]$ - мин. пос-ть в зад. ($J(u_k) \rightarrow J_* = 0$)

$J(u_k) = \int_0^T u_k^2(t) dt = \int_0^T \sin^2(\frac{2\pi k}{T}t) dt = \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{T}{4} \rightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow J(u_k) \rightarrow 0$
 $\Rightarrow u_k \in L_2(0, T), u_k(t) \xrightarrow{\text{слабо}} 0$



Пример 2 $J(u) = |u| \rightarrow \inf, u \in E^1$ при усл., что $|J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta(1 + |u|^2)$

$$\leq \delta(1 + |u|^2)$$

$$J_\delta(u) = |u| + \delta(1 + u^2) \rightarrow \inf \Rightarrow J_{\delta_*} = \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

$$J_\delta(u) = |u| - \delta(1 + u^2) \Rightarrow J_{\delta_*} = -\infty, u_* \in \emptyset$$

$$L_\delta(u) = J_\delta(u) + \alpha |u|^2 \rightarrow \inf, u \in E^1$$

$$L_\delta(u) = |u| - \delta + |u|^2(\alpha - \delta) \rightarrow \inf \Rightarrow L_{\delta_*}^* = -\delta, u_* = 0$$

2) Метод стабилизации $J(u) \rightarrow \inf, u \in U$

Из различн. вариантов подходов к решению задачи (1) $J \in H$ - метод стабилизации (А.Н. Тихонов). В зад. (1) $J \in H$ - вып. пр-во, также $J |J_\delta(u) - J(u)| \leq \delta(1 + \|u\|^2), \forall u \in U$ (2)

Составим ф-цию Тихонова $L_\delta(u) \rightarrow \inf, u \in U$ (3)

Эту зад. дост. решить приближенно: $u_\delta \in U, L_\delta(u) \leq \inf_{u \in U} L_\delta(u) + \varepsilon(\delta)$ (4)
 $\|u_\delta - u_*\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, u_* \in U_*$

Формально метод стабилизации описан

1) U - вып. замкн. мн-во из H ;

2) ф-ция $J(u)$ вып. и полунепр. снизу на U ;

3) $J_* > -\infty, U_* \neq \emptyset$;

4) решим-то задания $J(u)$ удовл. усл-ю (2);

5) $\alpha(\delta) > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\alpha} = 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0, \delta > 0$ (5)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha = 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(u_\delta) = J_*, \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - u_*\|_H = 0, (6) \text{ где } u_* - \text{корр. реш-е}$$

$$\text{зад. (1)} (u_* \in U_*, \|u_*\| = \inf_{u \in U_*} \|u\|)$$

ΔB опате с точкой потерями $\|u\|$

VII. 3) Принцип max (общий случай)

Выше мы рассмотрели прост. зад. ОУ. Теперь:

$$J(u(\cdot), x(\cdot), T) = \int_0^T f^0(x(t), u(t), t) dt + \varphi^0(x(T), T) \rightarrow \inf; (1)$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), t_0 \leq t \leq T, x(t_0) = x_0; (2)$$

$$g^i(x(T), T) \leq 0, i = \overline{1, m}; g^i(x(T), T) = 0, i = \overline{m+1, s}; (3)$$

$$u = u(t) - \text{пр. измеримое упр-е}, u(t) \in V \subseteq E \text{ (н)}$$

Эта зад. включает в себя:

- 1) зад. со свобод. прав. концом, когда $g^i(x, T) \equiv 0, i = \overline{1, s};$
- 2) зад. с закрепл. прав. концом: $g^i(x, T) = x^i - x_{\pm}^i, i = \overline{m+1, s}, m=0;$
- 3) задачи быстрогодействия: $Y(u) = T, f^0 \equiv 0, g^0(x, T) = T$ или $f^0 \equiv 1, g^0 \equiv 0;$

1) зад. с подвижным прав. концом (3), (н), когда $m \geq 1$ или $s \geq 1$, $T = T_0$ - задано.

В формулировке ТМТ введем ф-ции:

$$H(x, u, t, \psi, a_0) = -a_0 f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle; (5)$$

$$l(x, T, a) = \sum_{i=0}^s a_i g^i(x, T), a = (a_0, \dots, a_s) \quad (6)$$

$\square$ ф-ции $f^j(x, u, t), j = \overline{1, n}, g^j(x, T), j = \overline{0, s}$, имеют частные производные $f_{x^i}^j, f_{u^i}^j, f_t^j$, все эти ф-ции непр. по совокупности их аргументов при $x \in E^n, u \in V, t \in [t_0, T], T \geq t_0$. $J(x(\cdot), u(\cdot), T)$ - реш-е зад. (1)-(н), J упр-ние $u = u(t)$ - кус-непр. на $[t_0, T]$. Тогда $\exists$ числа $a = (a_0, \dots, a_s)$ и в-р-ф-ция $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)), t_0 \leq t \leq T$:

$$1) a \neq 0, a_0 \geq 0, \dots, a_m \geq 0; (7)$$

$$2) \psi(t) = \psi - \text{реш-е с-ммы } \dot{\psi} = - \frac{\partial H(x, u, t, \psi, a_0)}{\partial x} \Big|_{\substack{u=u(t) \\ x=x(t)}}; (8)$$

$$3) g^j \text{ всех } t \equiv m. \text{ непр. } u(\cdot) \Rightarrow t_0 \leq t \leq T$$

$$\max_{v \in V} H(x(t), v, t, \psi(t), a_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), a_0); (9)$$

н) выполнены усл-я трансверсальности: $\psi(T) = - \frac{\partial l}{\partial x} \Big|_{x=x(T)}$ в случае, когда T - извест. (10),

$$u(T) = u(T-0),$$

$$H(x(t), u(t), t, \psi(t), a_0) \Big|_{t=T-0} = \frac{\partial l}{\partial T} \Big|_{x=x(T)} \text{ (в случае, if } T \text{ - неизв.) (11),}$$

$$5) \text{ усл-е гор. нехвостности: } a_j g^j(x(T), T) = 0, j = \overline{1, m} \quad (12)$$